第四章 数字相关和数字卷积

- 4.1 线性相关
- 4.2 循环相关
- 4.3 相干函数
- 4.4 线性卷积
- 4.5 循环卷积
- 4.6 相关函数和功率谱的估计（自学）
- 4.7 相关技术的应用

4.1 线性相关……

线性相关是讨论两信号之间的同步性或相似性或同相性或两信号的变化规律是否具有线性关系或接近线性关系的程度。

设有离散信号$x(n)$和$y(n)$,其线性相关函数为：

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)y(n+m)$$

$m>0$表示$y(n)$序列左移，$m<0$表示$y(n)$序列右移。$r_{xy}(m)>0$表明有同相成分存在，$r_{xy}(m)<0$表明有反相成分存在，$r_{xy}(m)=0$表明两序列正交。简洁表达如下：

$$r_{xy}(m)=x(n)\bullet y(n)$$

4.1 线性相关……

如果令$k=m+n$，则$n=k-m$，线性相关函数有如下转变：

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)y(n+m)$$

$$\Downarrow$$

$$r_{xy}(m)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k-m)y(k)$$

式中表明$y(n)$左移，相当于$x(n)$右移，两式子等效。

然而，$r_{xy}(m)$与$r_{yx}(m)$则不同：

$$r_{yx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y(n)x(n+m)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}y(k-m)x(k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)y(k-m)=r_{xy}(-m)$$

4.1 线性相关……

【例4-1】设$x(n)$和$y(n)$是有限长的序列，$x(n)=[1,0.1,-1,0.1]$, $y(n)=[0.1,1,0.1,-1]$, 求两序列的线性相关函数。

解：线性相关函数可以采用直接计算法、表格法和图形法求解。

（1）直接计算法（最直接）

$x(n)$和$y(n)$都是4点长的序列，n从0到3有值，其余为零，当位移$m>3$时，没有公共部分，相乘必然为零；当位移$m<-3$时，也没有公共部分，相乘为零；因而我们只要求m＝-3、-2、-1、0、1、2、3的$r_{xy}(m)$即可：

4.1 线性相关……

m＝－3， $r_{xy}(-3)=\sum_{n=0}^{3}x(n)y(n-3)$ ＝0.1×0.1＝0.01

m＝－2， $r_{xy}(-2)=\sum_{n=0}^{3}x(n)y(n-2)$ ＝－1×0.1＋0.1×1＝0

m＝－1， $r_{xy}(-1)=\sum_{n=0}^{3}x(n)y(n-1)$ ＝0.1×0.1＋（－1）×1＋0.1×0.1＝－0.98

m＝0， $r_{xy}(0)=\sum_{n=0}^{3}x(n)y(n)$ ＝1×0.1＋0.1×1＋（－1）×0.1＋0.1×（－1）＝0

m＝1， $r_{xy}(1)=\sum_{n=0}^{3}x(n)y(n+1)$ ＝1×1＋0.1×0.1＋（－1）×（－1）＝2.01

m＝2， $r_{xy}(2)=\sum_{n=0}^{3}x(n)y(n+2)$ ＝1×0.1＋0.1×（－1）＝0

m＝3， $r_{xy}(3)=\sum_{n=0}^{3}x(n)y(n+3)$ ＝1×（－1）＝－1

因此， $r_{xy}(m)$ ＝[0.01，0，-0.98，$\underset{\uparrow}{0}$，2.01，0，－1] 序列长度为两序列长度之和再减1。

4.1 线性相关……

（2）表格法（最直观）

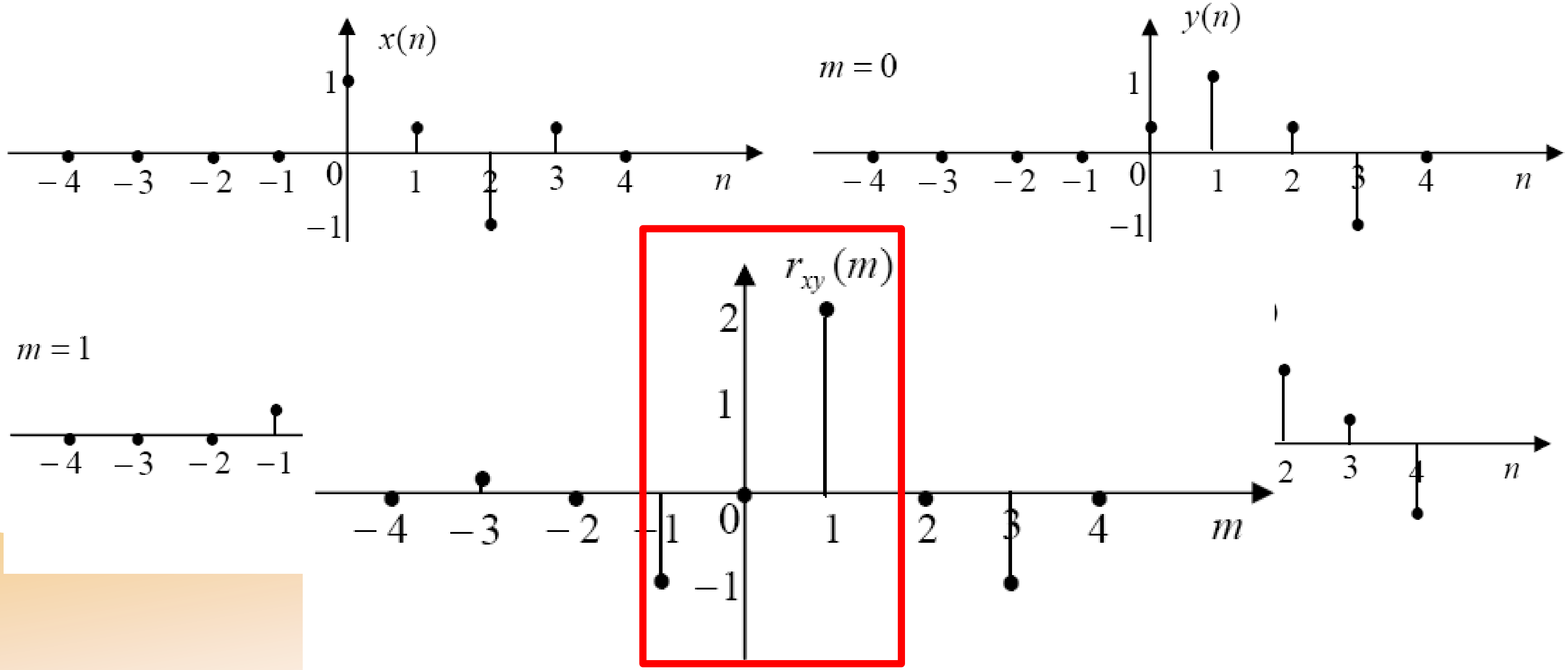
表格第一行表示 $x(n)$，第二行开始把对应时刻m的$y(n+m)$逐一填入，然后对同一m值，取$x(n)\ y(n+m)$ 的乘积，再相加，得到$r_{xy}(m)$。

m \ $y(n+m)$ \ $x(n)$	$x(0)$ 1	$x(1)$ 0.1	$x(2)$ −1	$x(3)$ 0.1	$r_{xy}(m)$
−3	0 $y(-3)$	0 $y(-2)$	0 $y(-1)$	0.1 $y(0)$	0.01
−2	0 $y(-2)$	0 $y(-1)$	0.1 $y(0)$	1 $y(1)$	0
−1	0 $y(-1)$	0.1 $y(0)$	1 $y(1)$	0.1 $y(2)$	−0.98
0	0.1 $y(0)$	1 $y(1)$	0.1 $y(2)$	−1 $y(3)$	0
1	1 $y(1)$	0.1 $y(2)$	−1 $y(3)$	0 $y(4)$	2.01
2	0.1 $y(2)$	−1 $y(3)$	0 $y(4)$	0 $y(5)$	0
3	−1 $y(3)$	0 $y(4)$	0 $y(5)$	0 $y(6)$	−1

4.1 线性相关……

（3）图形法（最麻烦）

分别画出$x(n)$和$y(n)$以及移位的$y(n+m)$序列，取$x(n)$ $y(n+m)$ 的乘积，再相加，得到$r_{xy}(m)$。



4.1 线性相关……

【例4-2】设$x(n)$和$y(n)$是有限长的序列，序列$x(n)$长度为N点，序列$y(n)$的长度为M点, $x(n)$除区间$N_1 \le n \le N_2$之外皆为0， $y(n)$除区间$N_3 \le n \le N_4$之外皆为0，证明他们的线性相关函数$r_{xy}(m)$的长度为$M+N-1$点，并且区间$N_3-N_2 \le m \le N_4-N_1$之外皆为0。

证明：相关函数$r_{xy}(m)$：

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n+m)$$

$x(n)$的非0区间为： $N_1 \le n \le N_2$

乘-1得：$-N_2 \le -n \le -N_1$

4.1 线性相关……

$y(n+m)$的非0区间为： $N_3 \le n+m \le N_4$

将两式相加： $N_3-N_2 \le m \le N_4-N_1$

上式表明， $r_{xy}(m)$的长度为$L=N_4-N_1-(N_3-N_2)+1$，由题意知$N=N_2-N_1+1$， $M=N_4-N_3+1$，因此，长度$L=N_4-N_1-(N_3-N_2)+1=N_4-N_3+1+N_2-N_1+1-1=M+N-1$，也就是线性相关函数$r_{xy}(m)$的长度为$L=M+N-1$。

4.1 线性相关

如果**x(n)**和**y(n)**的序列点比较长，用上述的直接计算法、表格法和图形法就显得不太方便，因此需要用矩阵形式来进行表达。假设**x(n)**序列长度为**N**点，**y(n)**序列长度也为**N**点，两序列**N**点之外皆为零，用矩阵的形式来表达线性相关函数$r_{xy}(m)$：

$$r_{xy}(m)=\sum^{N-1} x(n)y(n+m)=$$

$$\begin{array}{ccccccc} r_{xy}[-(N-1)] & \ldots & r_{xy}(-1) & r_{xy}(0) & r_{xy}(1) & \ldots & r_{xy}[(N-1)] \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(N-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & y(0) & y(1) & \cdots & y(N-1) \\ 0 & \cdots & y(0) & y(1) & y(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & y(1) & y(2) & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \vdots & \vdots & y(N-1) & \cdots & \vdots \\ y(0) & \cdots & y(N-2) & y(N-1) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

如果**x(n)**和**y(n)**的长度不同，则将短的序列进行补0，使得两序列点长相同，然后计算$r_{xy}(m)$。**Matlab**中有直接求线性相关的函数：**r=xcorr(x,y)**。

课堂练习

用直接法和表格法做如下例题：

1、 设 $x(n)$ 和 $y(n)$ 是有限长的序列， $x(n)=[1,2,-2]$, $y(n)=[2,2,-2]$, 求两序列的线性相关函数。

课堂练习

用直接法和表格法做如下例题：

1、设 $x(n)$ 和 $y(n)$ 是有限长的序列，$x(n)=[1,2,-2]$, $y(n)=[2,2,-2]$, 求两序列的线性相关函数。

4.2 循环相关……

循环相关是针对序列的循环移位的一种相关运算。

有限长序列的循环移位是指$y((n+m))_N R_N(n)$,即让序列$y(n)$以N为周期进行周期延拓，然后再进行左移位。

只朝一个方向进行移位的原因：对周期序列向左移动一个位置，等效于向右移动N-1个位置。

例如：将周期序列$y((n))_N$左移1个单位变为$y((n+1))_N$，由于是周期序列，因此有如下关系：

$$y((n+1))_N = y((n+1-N))_N = y((n-(N-1)))_N$$

4.2 循环相关……

设有离散信号***x*(*n*)**和***y*(*n*)**,其***N***点循环相关函数为：

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y((n+m))_N R_N(n)$$

由于循环移位的关系，最后得到的循环相关序列的长度就是***N***点，***m***取**[0,1,2,…,*N*-1]**。

循环相关运算的简洁表达式如下：

$$r_{xy}(m)=x(n)\odot y(n)$$

式中，$\odot$表示循环相关运算符

4.2 循环相关……

【例4-3】求例4-1中的两个序列的4点循环相关函数。

解：同样可以采用直接计算法、图形法和表格法来进行求解

（1）直接计算法

$x(n)$和$y(n)$都是4点长的序列，n从0到3有值，其余为0, 4点循环相关就只要运算$m=0,1,2,3$的 $r_{xy}(m)$。把$y(n)$以4为周期进行周期延拓，得到：

$$y((n))_4=[\cdots 0.1,\ 1,\ 0.1,\ -1,\ 0.1,\ 1,\ 0.1,\ -1,\ 0.1,\ 1,\ 0.1,\ -1\cdots]$$

$$x(n)=[1,\ 0.1,\ -1,\ 0.1]$$

4.2 循环相关……

m=0，$r_{xy}(0)=1\times0.1+0.1\times1+(-1)\times0.1+0.1\times0.1=0$

m=1，$r_{xy}(1)=1\times1+0.1\times0.1+(-1)\times(-1)+0.1\times0.1=2.02$

m=2，$r_{xy}(2)=1\times0.1+0.1\times(-1)+(-1)\times0.1+0.1\times1=0$

m=3，$r_{xy}(3)=1\times(-1)+0.1\times0.1+(-1)\times1+0.1\times0.1=-1.98$

因此，$r_{xy}(m)=[\underset{\uparrow}{0},\ 2.02,\ 0,\ -1.98]$

4.2 循环相关……

（2）表格法

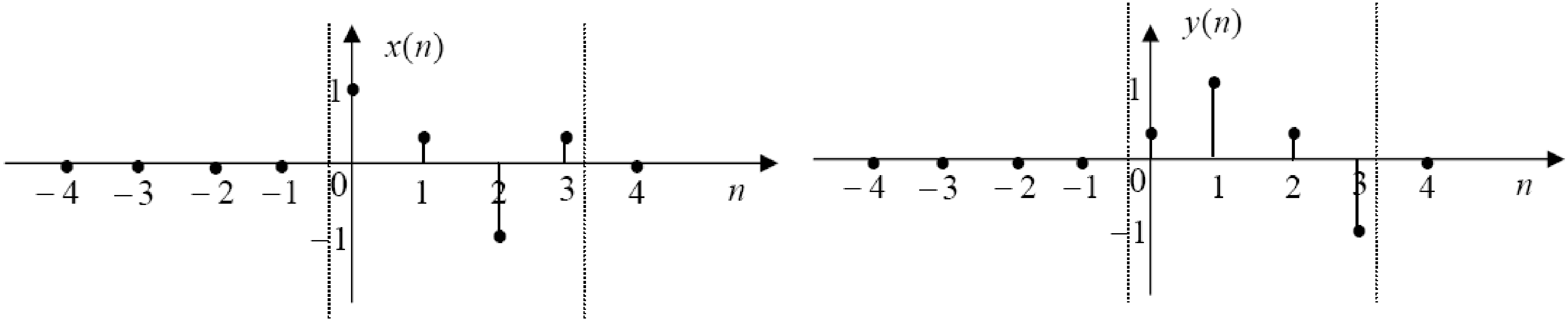
第一行表示$x(n)$，第二行并开始将对应时刻m的$y((n+m))_N R_N(n)$逐一填入，然后对同一m值，取$x(n)$与$y((n+m))_N R_N(n)$对应项的乘积，再相加，得到循环相关函数 $r_{xy}(m)$。

$y((n+m))_N R_N(n)$ \ $x(n)$ / m	$x(0)$ 1	$x(1)$ 0.1	$x(2)$ −1	$x(3)$ 0.1	$r_{xy}(m)$
0	0.1 $y(0)$	1 $y(1)$	0.1 $y(2)$	−1 $y(3)$	0
1	1 $y(1)$	0.1 $y(2)$	−1 $y(3)$	0.1 $y(4-4)$	2.02
2	0.1 $y(2)$	−1 $y(3)$	0.1 $y(4-4)$	1 $y(5-4)$	0
3	−1 $y(3)$	0.1 $y(4-4)$	1 $y(5-4)$	0.1 $y(6-4)$	−1.98

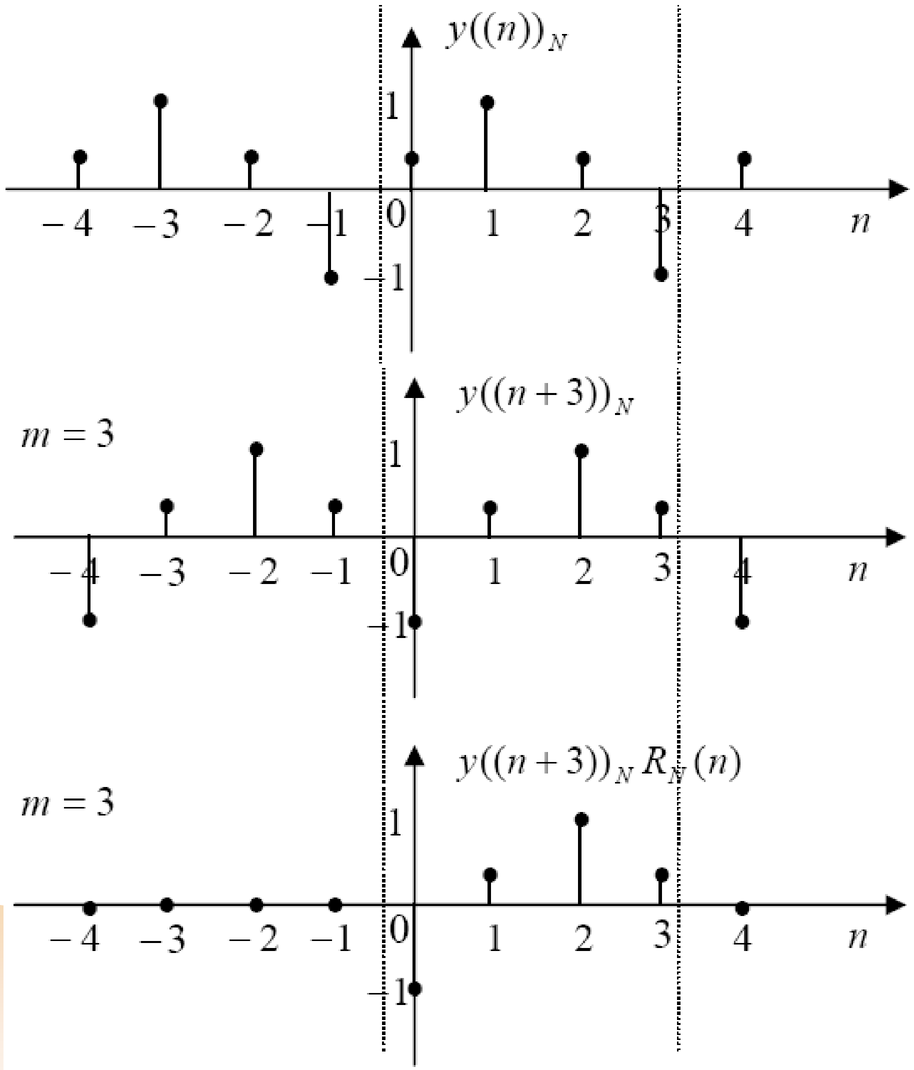
4.2 循环相关……

（3）图形法

通过左移可以依次得到m=0,1,2,3的$y((n+m))_N R_N(n)$。然后将得到的4点序列与$x(n)$对应相乘，再相加即可。如下图，将第一幅图与最后一幅图相乘再相加即可得到当m=3时的$r_{xy}(3)$=-1.98。



4.2 循环相关……



4.2 循环相关……

求循环相关函数时，如果$x(n)$的长度为N，$y(n)$的长度为M，若要求他们的L点循环相关，L大于或等于M、N，也是一样把$y(n)$以L为周期进行周期延拓，再左移位，取L点主值与补0到L点长的$x(n)$对应项相乘，再相加。

如果$x(n)$和$y(n)$的序列点比较长，同样也可以用矩阵的形式对$r_{xy}(m)$进行求解：

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y((n+m))_N R_N(n)=$$

$$\begin{bmatrix}x(0) & x(1) & \cdots & x(N-1)\end{bmatrix}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r_{xy}(0) & r_{xy}(1) & \cdots & r_{xy}(N-1)\end{array} \\ \begin{bmatrix}y(0) & y(1) & \cdots & y(N-1)\\ y(1) & y(2) & \cdots & y(0)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ y(N-1) & y(0) & \cdots & y(N-2)\end{bmatrix}\end{array}$$

4.2 循环相关

Matlab中的循环左移的函数circlel()

```
function v=circlel(y)%输入向量必须是行向量
N=length(y);
v=zeros(N,N);
for i=1:N
for j=1:N
v(i,j)=y(j);
end
L=y(1);
for k=1:N-1
y(k)=y(k+1);
end
y(N)=L;
end
```

生成矩阵

$$\begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \cdots & y(N-1) \\ y(1) & y(2) & \cdots & y(0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y(N-1) & y(0) & \cdots & y(N-2) \end{bmatrix}$$

给定$x(n)$与$y(n)$,计算过程：V=circlel(y);$r=x*V$，序列短就补0，使两短序列长度相等，在进行上述计算。

课堂练习

用直接法和表格法做如下例题：

1、设 $x(n)$ 和 $y(n)$ 是有限长的序列，$x(n)=[1,2,-2]$, $y(n)=[2,2,-2]$, 求两序列的3点循环相关函数。

4.3 相干函数……

相关函数$r_{xy}(m)$值的大小与$x(n)$和$y(n)$序列值的大小相关，难以比较各组信号的相关程度，因而提出相干函数。

- **1、时域相干函数**

设两个离散信号$x(n)$和$y(n)$，两信号的的误差能量 ε^2 表示如下：

$$\varepsilon^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[x(n)-ay(n)\right]^2$$

a用最小二乘进行估计，得到：

$$\frac{d\varepsilon^2}{da}=2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[x(n)-ay(n)\right]\left[-y(n)\right]=0$$

推出：

$$a=\frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)y(n)}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y^2(n)} \qquad \varepsilon_{\min}^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x^2(n)-\frac{\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)y(n)\right]^2}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y^2(n)}$$

4.3 相干函数……

$$a=\frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)y(n)}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y^2(n)}\xrightarrow{\text{推导}}\varepsilon_{\min}^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x^2(n)-\frac{\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)y(n)\right]^2}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y^2(n)}$$

$$\varepsilon_{\min}{}^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[x(n)-y(n)\frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)y(n)}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y^2(n)}\right]^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[x^2(n)-2x(n)y(n)\frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)y(n)}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y^2(n)}+y^2(n)\left(\frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)y(n)}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y^2(n)}\right)^2\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[x^2(n)-2\frac{\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)y(n)\right]^2}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y^2(n)}+\frac{\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)y(n)\right]^2}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y^2(n)}\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[x^2(n)-\frac{\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)y(n)\right]^2}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y^2(n)}\right]$$

4.3 相干函数……

以$x(n)$的能量为基准，得到相对最小误差能量e^2_{min}为：

$$e^2_{\min} = \frac{\varepsilon^2_{\min}}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n)} = 1 - \frac{\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n)\right]^2}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y^2(n)}$$

$$\rho^2_{xy} = \frac{\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n)\right]^2}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y^2(n)}$$

ρ_{xy}称为归一化相关系数，或者叫相干系数。在一个序列移动的情况下，相干系数就变成相干函数，它是m的函数，用 $\rho^2_{xy}(m)$表示：

$$\rho^2_{xy}(m) = \frac{\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n+m)\right]^2}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y^2(n)}$$

4.3 相干函数……

用$r^2_{xy}(0)$和$r^2_{xy}(m)$分别代替式子部分，得到：

$$\rho_{xy} = \frac{r_{xy}(0)}{\left[r_{xx}(0)\cdot r_{yy}(0)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\rho_{xy}(m) = \frac{r_{xy}(m)}{\left[r_{xx}(0)\cdot r_{yy}(0)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$\rho_{xy}(m)$相干函数即归一化到[-1,1]的相关函数,相干函数的大小与信号值的大小无关，因而易于比较不同的相关程度。

4.3 相干函数……

【例4-4】$x(n)$和$y(n)$是有限长的序列，$x(n)=[\underset{\uparrow}{1},0.1,-1,0.1]$，$y(n)=[0,\underset{\uparrow}{1},1,0.1,-1]$，求线性相干函数和线性相干系数。

解：由例题4-1得 $r_{xy}(m)=[0.01,\ 0,\ -0.98,\ \underset{\uparrow}{0},\ 2.01,\ 0,\ -1]$

$$\rho_{xy}(m)=\frac{r_{xy}(m)}{\left[r_{xx}(0)\cdot r_{yy}(0)\right]^{\frac{1}{2}}}=[0.005,\ 0,\ -0.485,\ \underset{\uparrow}{0},\ 0.995,\ 0,\ -0.495]$$

$$\rho_{xy}=0$$

$$r_{xx}(0)=\sum_{n=0}^{3}x(n)x(n)=1\times1+0.1\times0.1+(-1)\times(-1)+0.1\times0.1=2.02$$

$$r_{yy}(0)=\sum_{n=0}^{3}y(n)y(n)=0.1\times0.1+1\times1+0.1\times0.1+(-1)\times(-1)=2.02$$

4.3 相干函数……

【例4-5】$x(n)$和$y(n)$是有限长的序列，$x(n)=[1,0.1,-1,0.1]$,

$y(n)=[0,1,1,0.1,-1]$,求循环相干函数和循环相干系数。

解：由例题4-3得 $r_{xy}(m)=[0,2.02,0,-1.98]$

$$\rho_{xy}(m)=\frac{r_{xy}(m)}{\left[r_{xx}(0)\cdot r_{yy}(0)\right]^{\frac{1}{2}}}=[0,1,0,-0.98]$$

$$\rho_{xy}=0$$

$$r_{xx}(0)=\sum_{n=0}^{3}x(n)x(n)=2.02$$

$$r_{yy}(0)=\sum_{n=0}^{3}y(n)y(n)=2.02$$

4.3 相干函数……

【例4-6】参见pp.47

4.3 相干函数

- **2、频域相干函数（pp.48-49）**

【例4-7】参见pp.49

【例4-8】参见pp.49-51

4.4 线性卷积……

卷积运算是LTI（线性时不变系统）分析的重要工具，设有离散信号$x(n)$和$y(n)$，线性卷积为：

$$c_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)y(m-n)$$

与线性相关比较：

（1）卷积运算要对$y(n)$反折变为$y(-n)$;

（2）$m>0$,表示$y(-n)$右移， $m<0$,表示$y(-n)$左移。

线性卷积运算的简洁表达方式：

$$c_{xy}(m)=x(n)*y(n)$$

式中，*表示线性卷积运算符。

4.4 线性卷积……

$$c_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)y(m-n)$$

令***k=m-n***，则***n=m-k***

$$c_{xy}(m)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(m-k)y(k)=c_{yx}(m)$$

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)y(n+m)$$

令***k=m+n***，则***n=k-m***

$$r_{xy}(m)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k-m)y(k)=r_{yx}(-m)$$

因此，卷积运算交换先后不影响结果，但是相关运算互为相反数。

4.4 线性卷积……

【例4-9】设$x(n)$和$y(n)$是有限长的序列，序列$x(n)$长度为N点，序列$y(n)$的长度为M点, $x(n)$除区间$N_1 \le n \le N_2$之外皆为0， $y(n)$除区间$N_3 \le n \le N_4$之外皆为0，证明他们的线性卷积函数$c_{xy}(m)$的长度为$M+N-1$点，并且区间$N_3+N_1 \le m \le N_4+N_2$之外皆为0。

证明：依题意，

$$c_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(m-n)$$

$x(n)$的非0区间： $N_1 \le n \le N_2$

$y(m-n)$的非0区间： $N_3 \le m-n \le N_4$

因此： $N_3+N_1 \le m \le N_4+N_2$

4.4 线性卷积……

【例4-10】设$x(n)$和$y(n)$是有限长的序列，$x(n)$=[1,0.1,-1,0.1], $y(n)$=[0.1,1,0.1,-1], 求两序列的线性卷积。

解：线性卷积也可以采用直接计算法、表格法和图形法求解。

（1）直接计算法（最直接）

$x(n)$和$y(n)$都是4点长的序列，n从0到3有值，其余为零，当位移$m<0$时，没有公共部分，相乘必然为零；当位移$m>6$时，也没有公共部分，相乘为零；因而我们只要求m＝0、1、2、3、4、5、6的$c_{xy}(m)$即可：

4.4 线性卷积……

m＝0， $c_{xy}(0)=\sum_{n=0}^{3}x(n)y(-n)$ ＝1×0.1＝0.1

m＝1， $c_{xy}(1)=\sum_{n=0}^{3}x(n)y(1-n)$ ＝1×1＋0.1×0.1＝1.01

m＝2， $c_{xy}(2)=\sum_{n=0}^{3}x(n)y(2-n)$ ＝1×0.1＋＋0.1×1＋（－1）×0.1＝0.1

m＝3， $c_{xy}(3)=\sum_{n=0}^{3}x(n)y(3-n)$ ＝1×（－1）＋0.1×0.1＋1×（－1）＋0.1×0.1＝－1.98

m＝4， $c_{xy}(4)=\sum_{n=0}^{3}x(n)y(4-n)$ ＝0.1×（－1）＋（－1）×0.1＋0.1×1＝－0.1

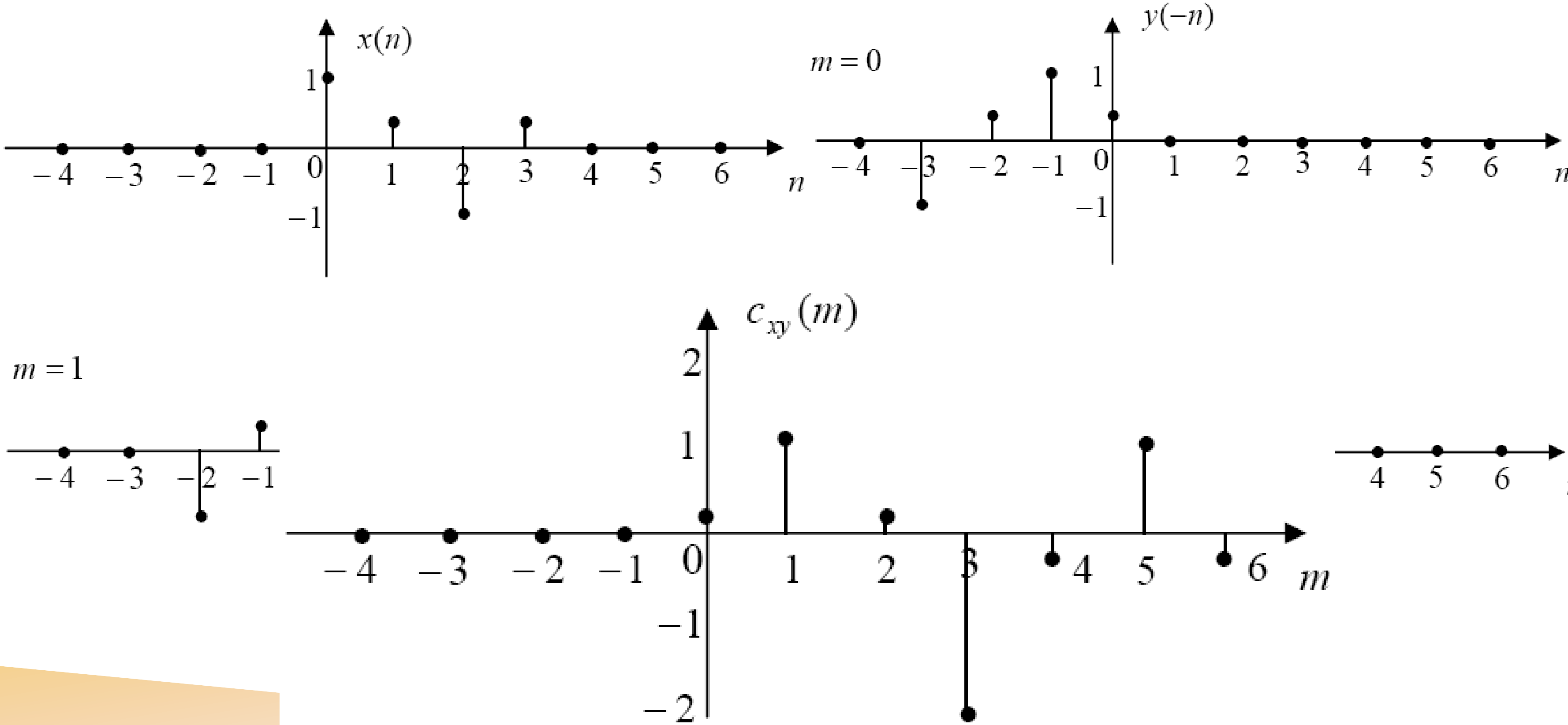
m＝5， $c_{xy}(5)=\sum_{n=0}^{3}x(n)y(5-n)$ ＝（－1）×（－1）＋0.1×0.1＝1.01

m＝6， $c_{xy}(6)=\sum_{n=0}^{3}x(n)y(6-n)$ ＝0.1×（－1）＝－0.1

综上， $c_{xy}(m)$ ＝[0.1， 1.01， 0.1， －1.98， －0.1， 1.01， －0.1]

4.4 线性卷积……

（2）图形法（最复杂）



4.4 线性卷积……

（3）表格法（最直观）

表格第一行表示 $x(n)$，第二行开始把对应时刻m的$y(m-n)$逐一填入，然后对同一m值，取$x(n)$ $y(m-n)$ 的乘积，再相加，得到$c_{xy}(m)$。

$y(m-n)$ \ $x(n)$ / m	$x(0)$ 1	$x(1)$ 0.1	$x(2)$ −1	$x(3)$ 0.1	$c_{xy}(m)$
0	0.1 $y(0)$	0 $y(-1)$	0 $y(-2)$	0 $y(-3)$	0.1
1	1 $y(1)$	0.1$y(0)$	0 $y(-1)$	0 $y(-2)$	1.01
2	0.1$y(2)$	1 $y(1)$	0.1 $y(0)$	0 $y(-1)$	0.1
3	−1 $y(3)$	0.1$y(2)$	1 $y(1)$	0.1$y(0)$	−1.98
4	0 $y(4)$	−1$y(3)$	0.1 $y(2)$	1 $y(1)$	−0.1
5	0 $y(5)$	0 $y(4)$	−1$y(3)$	0.1 $y(2)$	1.01
6	0 $y(6)$	0 $y(5)$	0 $y(4)$	−1$y(3)$	−0.1

4.4 线性卷积

如果$x(n)$和$y(n)$的序列点比较长，用上述的直接计算法、表格法和图形法就显得不太方便，因此需要用矩阵形式来进行表达。假设$x(n)$序列长度为N点，$y(n)$序列长度也为N点，两序列N点之外皆为零，用矩阵的形式来表达线性卷积函数$c_{xy}(m)$：

$$c_{xy}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y(m-n)= \quad \begin{array}{ccccc} c_{xy}(0) & c_{xy}(1) & \dots & c_{xy}(N\text{-}1) & \dots\ c_{xy}(2N\text{-}2) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(-0) & y(1) & \cdots & y(N-1) & \cdots y(2N-2) \\ y(-1) & y(0) & \cdots & y(N-2) & \cdots y(2N-3) \\ y(-2) & y(-1) & \cdots & y(N-3) & \cdots y(2N-4) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \quad \vdots \\ y(-N+1) & y(-N+2) & \cdots & y(0) & \cdots\ y(N-1) \end{bmatrix}$$

如果$x(n)$和$y(n)$的长度不同，则将短的序列进行补0，使得两序列点长相同，然后计算$c_{xy}(m)$。Matlab中有直接求线性卷积的函数：c=conv(x,y)。

课堂练习

用直接法和表格法做如下例题：

1、设 $x(n)$ 和 $y(n)$ 是有限长的序列， $x(n)=[1,2,-2]$, $y(n)=[2,2,-2]$, 求两序列的线性卷积函数。

4.5 循环卷积……

循环卷积是针对序列的循环移位的一种相关运算。

有限长序列的循环移位是指$y((m-n))_N R_N(n)$,即让序列$y(-n)$以N为周期进行周期延拓，然后再进行右移位。

只朝一个方向进行移位的原因：对周期序列向右移动一个位置，等效于向左移动N-1个位置。

例如：将周期序列$y((-n))_N$右移1个单位变为$y((-n+1))_N$，由于是周期序列，因此有如下关系：

$$y((-n+1))_N = y((-n+1-N))_N = y((-(n+(N-1))))_N$$

4.5 循环卷积……

设有离散信号$x(n)$和$y(n)$,其N点循环卷积函数为：

$$c_{xy}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y((m-n))_N R_N(n)$$

由于循环移位的关系，最后得到的循环卷积序列的长度就是N点，m取[0,1,2,…,N-1]。

循环卷积运算的简洁表达式如下：

$$c_{xy}(m)=x(n)\circledast y(n)$$

式中，$\circledast$表示循环卷积运算符

4.5 循环卷积……

【例4-11】求例4-10中的两个序列的4点循环卷积函数。

解：同样可以采用直接计算法、图形法和表格法来进行求解

（1）直接计算法

$x(n)$和$y(n)$都是4点长的序列，n从0到3有值，其余为0, 4点循环相关就只要运算m=0,1,2,3的 $c_{xy}(m)$。把$y(-n)$以4为周期进行周期延拓，得到：

$$y((-n))_4=[\cdots -1,\ 0.1,\ 1,\ \underset{\uparrow}{0.1},\ -1,\ 0.1,\ 1,\ 0.1,\ -1,\ 0.1\cdots]$$

$$x(n)=[\underset{\uparrow}{1},\ 0.1,\ -1,\ 0.1]$$

4.5 循环卷积……

m＝0，$c_{xy}(0)=1\times0.1+0.1\times(-1)+(-1)\times0.1+0.1\times1=0$

m＝1，$c_{xy}(1)=1\times1+0.1\times0.1+(-1)\times(-1)+0.1\times0.1=2.02$

m＝2，$c_{xy}(2)=1\times0.1+0.1\times1+(-1)\times0.1+0.1\times(-1)=0$

m＝3，$c_{xy}(3)=1\times(-1)+0.1\times0.1+(-1)\times1+0.1\times0.1=-1.98$

因此，$c_{xy}(m)=[\underset{\uparrow}{0},\ 2.02,\ 0,\ -1.98]$

4.5 循环卷积……

（2）表格法

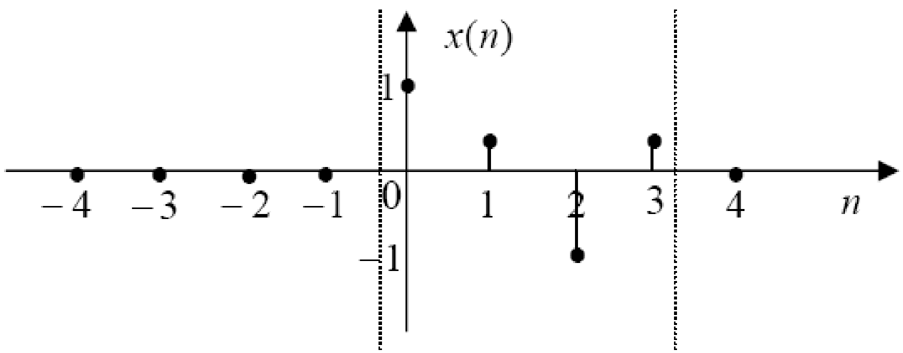
第一行表示$x(n)$，第二行并开始将对应时刻m的$y((m-n))_N R_N(n)$逐一填入，然后对同一m值，取$x(n)$与$y((m-n))_N R_N(n)$对应项的乘积，再相加，得到循环相关函数 $c_{xy}(m)$。

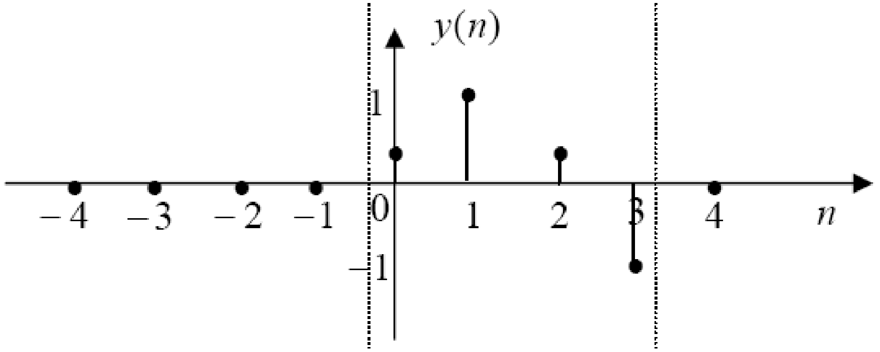
$y((m-n))_N R_N(n)$ \ $x(n)$ / m	$x(0)$ 1	$x(1)$ 0.1	$x(2)$ −1	$x(3)$ 0.1	$c_{xy}(m)$
0	0.1 $y(0)$	−1 $y(-1+4)$	0.1 $y(-2+4)$	1 $y(-3+4)$	0
1	1 $y(1)$	0.1 $y(0)$	−1 $y(-1+4)$	0.1 $y(-2+4)$	2.02
2	0.1 $y(2)$	1 $y(1)$	0.1 $y(0)$	−1 $y(-1+4)$	0
3	−1 $y(3)$	0.1 $y(2)$	1 $y(1)$	0.1 $y(0)$	−1.98

4.5 循环卷积……

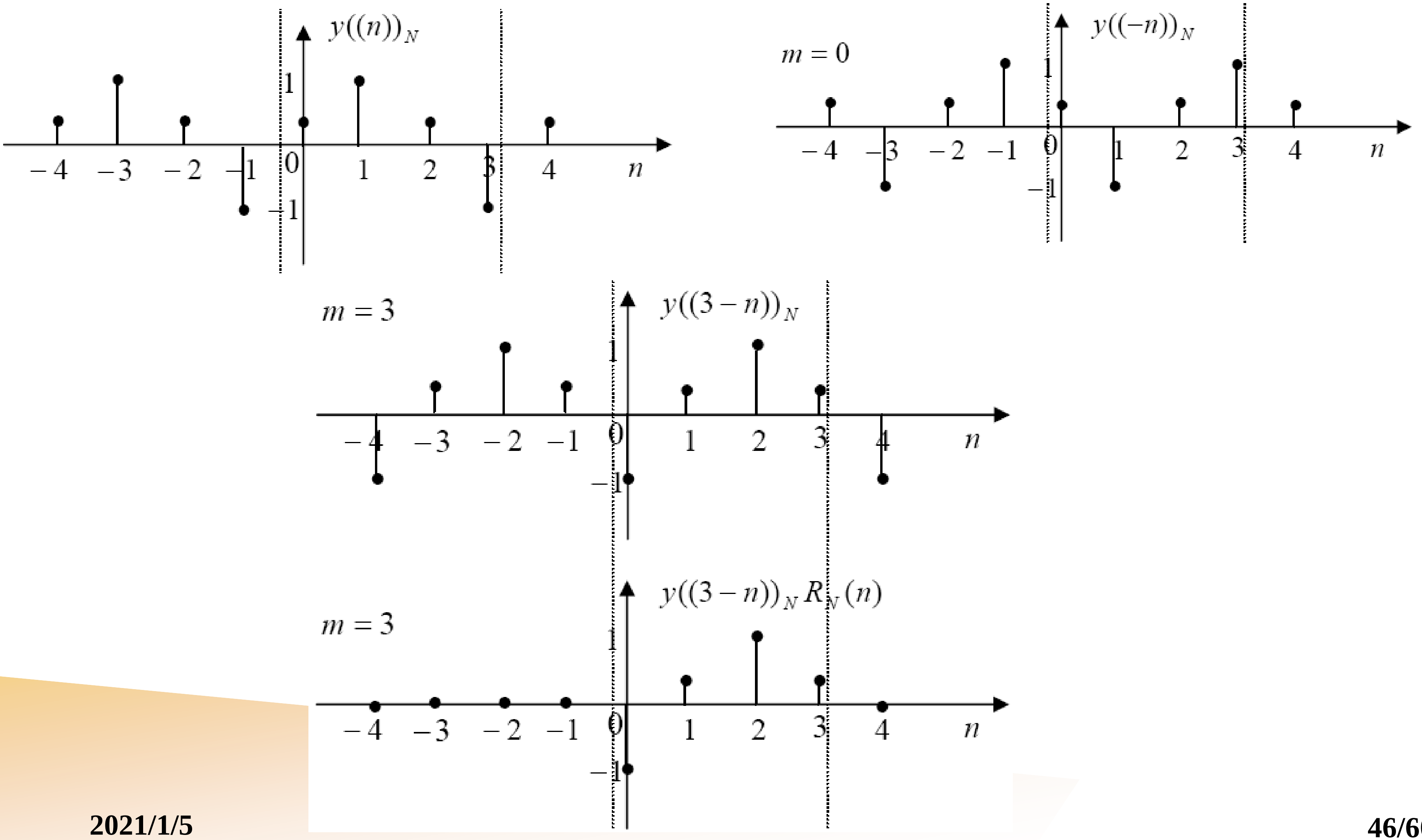
（3）图形法

通过右移可以依次得到m=0,1,2,3的$y((m-n))_N R_N(n)$。然后将得到的4点序列与$x(n)$对应相乘，再相加即可。如下图，将第一幅图与最后一幅图相乘再相加即可得到当m=3时的$c_{xy}(3)$=-1.98。





4.5 循环卷积……



4.5 循环卷积……

求循环卷积函数时，如果$x(n)$的长度为N，$y(n)$的长度为M，若要求他们的L点循环卷积，L大于或等于M、N，也是一样把$y(-n)$以L为周期进行周期延拓，再右移位，取L点主值与补0到L点长的$x(n)$对应项相乘，再相加。

如果$x(n)$和$y(n)$的序列点比较长，同样也可以用矩阵的形式对$c_{xy}(m)$进行求解：

$$c_{xy}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y((m-n))_N R_N(n)=$$

$$\begin{array}{c} \quad\quad c_{xy}(0) \quad\quad c_{xy}(1) \quad\quad \cdots \quad\quad c_{xy}(N\text{-}1) \\ \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \cdots & y(N-1) \\ y(N-1) & y(0) & \cdots & y(N-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y(1) & y(2) & \cdots & y(0) \end{bmatrix} \end{array}$$

4.5 循环卷积

Matlab中的循环右移的函数circler()

```
function v=circler(y)
N=length(y);v=zeros(N,N);
for i=1:N
for j=1:N
v(i,j)=y(j);
end
L=y(N);
for k=N:-1:2
y(k)=y(k-1);
end
y(1)=L;
end
V=V';
```

生成矩阵 $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \cdots & y(N-1) \\ y(N-1) & y(0) & \cdots & y(N-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y(1) & y(2) & \cdots & y(0) \end{bmatrix}$$

给定$x(n)$与$y(n)$,计算过程：V=circler(y);$r=x*V$，序列短就补0，使两短序列长度相等，在进行上述计算。

课堂练习

用直接法和表格法做如下例题：

1、设 $x(n)$ 和 $y(n)$ 是有限长的序列，$x(n)=[1,2,-2]$, $y(n)=[2,2,-2]$, 求两序列的3点循环卷积函数。

4.7 相关技术的应用……

相关技术分为自相关和互相关，分别用自相关函数和互相关函数。

自相关函数研究信号本身：波形的同步性和周期性等。

互相关函数研究两信号的同一性程度：测定两信号间的时间滞后或从噪声中检测信号。

对于确定信号**x(n)**的自相关函数：$r_{xx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)x(n+m)$

如果信号是随机的或周期的，其自相关函数定义：

$$r_{xx}(m)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x(n+m)$$

4.7 相关技术的应用……

几种常用信号的自相关函数。

（1）信号为正弦波的自相关函数

设 $x(n)=A\sin(\omega_0 n+\varphi)$ ，周期为***M***，则自相关函数为：

$$r_{xx}(m)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}A\sin(\omega_0 n+\varphi)\cdot A\sin(\omega_0 n+\omega_0 m+\varphi)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{A^2}{2}[\cos(\omega_0 m)-\cos(2\omega_0 n+\omega_0 m+2\varphi)]$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 m)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\therefore\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$r_{xx}(m+M)=r_{xx}(m)$$

4.7 相关技术的应用……

（2）信号为白噪声的自相关函数

设有一功率谱为 σ^2，则自相关函数为：

$$r(m)=\sigma^2\delta(m)$$

“白”的含义指两点之间没有任何相关性，带限白噪声，功率谱为矩形波。sinc函数性状，就是m=0有最大值，m足够大时趋近0。

一个观测信号$x(n)$实际上是周期信号$s(n)$和随机信号$w(n)$的叠加加过程，$x(n)= s(n)+ w(n)$。

如果信号和噪声互不相关，则自相关函数：

$$r_{xx}(m)= r_{ss}(m)+ r_{ww}(m)$$

m足够大， $r_{xx}(m)$不为0，可以判定周期信号存在！

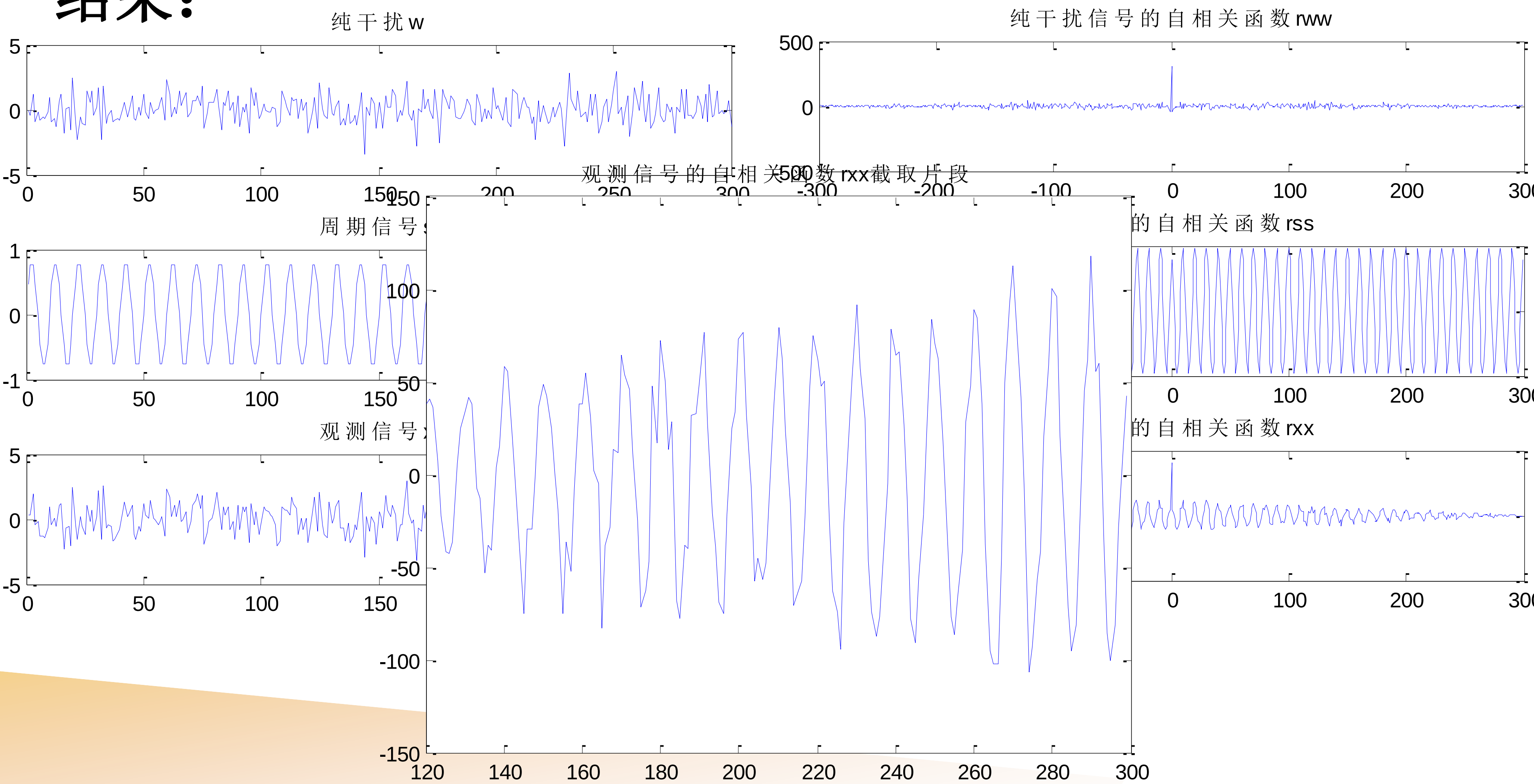
4.7 相关技术的应用……

【例4-13】设周期信号$s(n)=0.8\sin(\pi n/5)$，噪声$w(n)$为随机产生的白噪声，观测信号$x(n)= s(n)+ w(n)$。

```
%产生s信号
clear
m=1:300;
for n=1:300
    s(n)=0.8*sin(pi*n/5);
end
%产生随机白噪声
w=randn(1,300);
%生成观测信号
x=s+w;
%产生线性自相关函数
rww=xcorr(w);
rss=xcorr(s);
rxx=xcorr(x);
%生成原始信号图
figure,subplot(3,1,1),plot(m,w)
subplot(3,1,2),plot(m,s)
subplot(3,1,3),plot(m,x)
%生成自相关函数图
figure,subplot(3,1,1),plot(-299:299,rww)
subplot(3,1,2),plot(-299:299,rss)
subplot(3,1,3),plot(-299:299,rxx)
%扩大观测信号的自相关函数
figure,plot(120:299,rxx(120:299))
```

4.7 相关技术的应用……

结果：



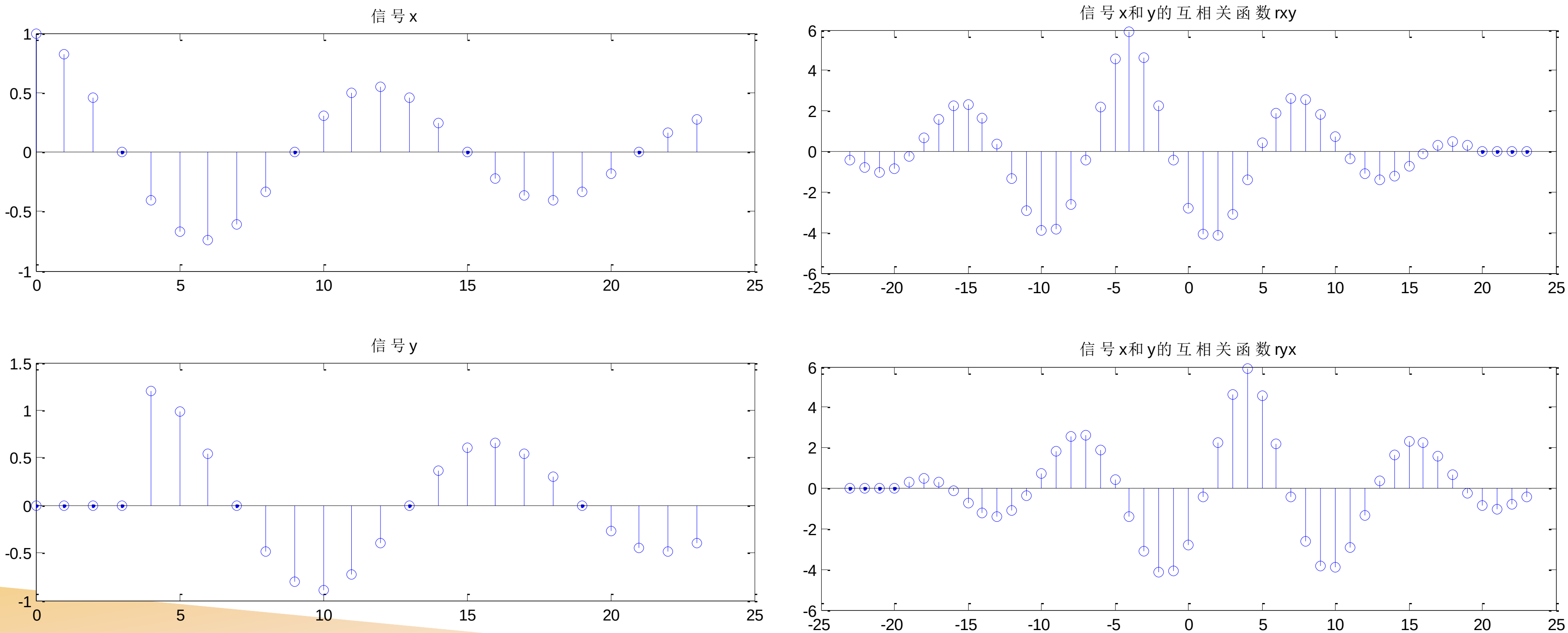
4.7 相关技术的应用……

【例4-14】设$x(n)= e^{-0.05n}\cos(\pi n/6)$，$y(n)=1.2x(n-n_0)$,它们的波形如下图所示，试估计延迟$n_0$。

```
%生成信号x和y
m=0:23;
for n=1:24
   x(n)=exp(-0.05*n)*cos(pi*n/6);
end
for n=5:24
   y(n)=1.2*x(n-4);
end
y(1:4)=0;
figure,subplot(2,1,1),stem(m,x),title('信号x')
subplot(2,1,2),stem(m,y),title('信号y')
%求信号x和y的线性互相关函数rxy和ryx
rxy=xcorr(x,y);
ryx=xcorr(y,x);
figure,subplot(2,1,1),stem(-23:23,rxy),title('信号x和y的互相关函数rxy')
subplot(2,1,2),stem(-23:23,ryx),title('信号x和y的互相关函数ryx')
```

4.7 相关技术的应用……

结果：



4.7 相关技术的应用

相关技术在脑机接口的应用（pp.66-68）

本章小结

1、掌握：线性相关、线性卷积、相干函数和相干系数；

2、熟悉：循环相关和循环卷积；

3、了解：相关技术的应用。

本章习题

用直接法和表格法做如下例题：

1、设$x(n)$和$y(n)$是有限长的序列，$x(n)=[2,0.1,-2,0.1]$，$y(n)=[0,1,2,0.1,-2]$，求两序列的线性相关、4点循环相关、线性相干、4点循环相干、线性卷积和4点循环卷积函数。

下集预告

第五章 维纳滤波

实验二详解……

% 选择信号类型并设定参数，产生信号x(n)

```
clear; clc;
disp('请选择信号');
disp('1 ---- 伪随机序列randn()');
disp('2 ---- 实际测量的心电信号');
disp('3 ---- 实际测量的脑电信号');
b = input('信号：');
switch b  % 输入序号，产生相应信号，L=128，N=8
   case 1
     L = input('每段数据长度 L \n');
     N = input('数据共多少段 N \n');
     x = randn(1, L*N);
   case 2
     load ecgdata;
     display(['数据总长度',num2str(length(ecgdata)),'点']);
     L = input('每段数据长度 L \n');
     N = input('数据共多少段 N \n');
     x = ecgdata (1:(N*L));
   case 3
    load eegdata;
    display(['数据总长度',num2str(length(eegdata)),'点']);
    L = input('每段数据长度 L \n');
    N = input('数据共多少段 N \n');
    x = eegdata (1:(N*L));
end
```

% 估计信号的统计特征量

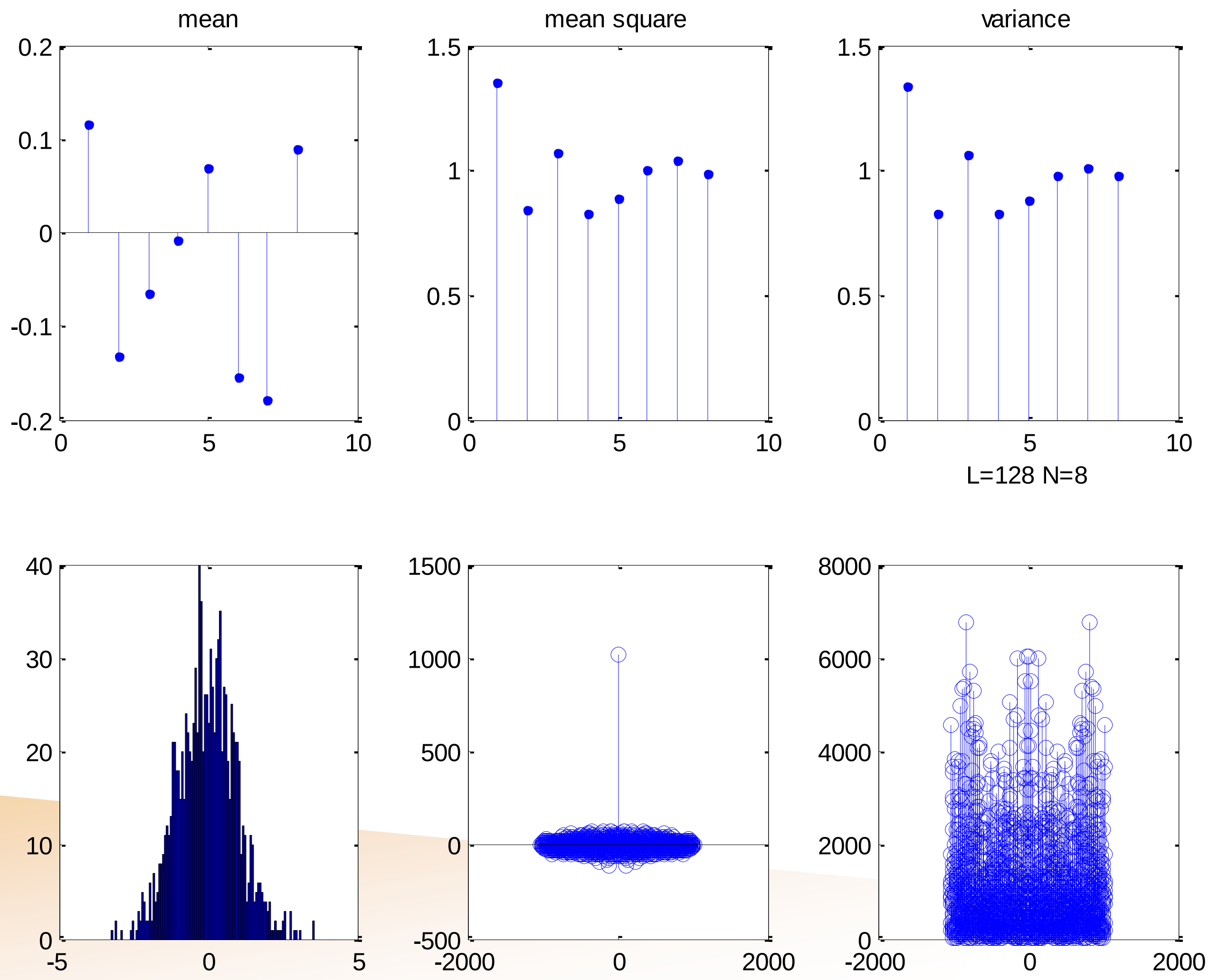
```
Xmean = zeros(1,N); % 每段数据均值
Xms = zeros(1,N); % 每段数据均方值
Xvar = zeros(1,N); % 每段数据方差
rxs=xcorr(x,x);
pxs=abs(fft(rxs));
for k = 1:N
    xs = x(((k-1)*L+1):(k*L));
    Xmean(k) = mean(xs);
    Xms(k) = std(xs).^2+ Xmean(k)^2;
    Xvar(k) = var(xs);
end
```

% 显示

```
n = 1:N;
figure;
subplot(2,3,1); stem(n,Xmean,'.'); title('mean');
subplot(2,3,2); stem(n,Xms,'.'); title('mean square');
subplot(2,3,3); stem(n,Xvar,'.'); title('variance');
xlabel(['L=',num2str(L),' ','N=',num2str(N)]);
subplot(2,3,4); hist(x,100); % 绘制数据直方图，观察信号大致的概率分布
subplot(2,3,5); stem(-(N*L-1):N*L-1,rxs);%绘制自相关图谱
subplot(2,3,6); stem(-(N*L-1):N*L-1,pxs);%绘制自功率图谱
```

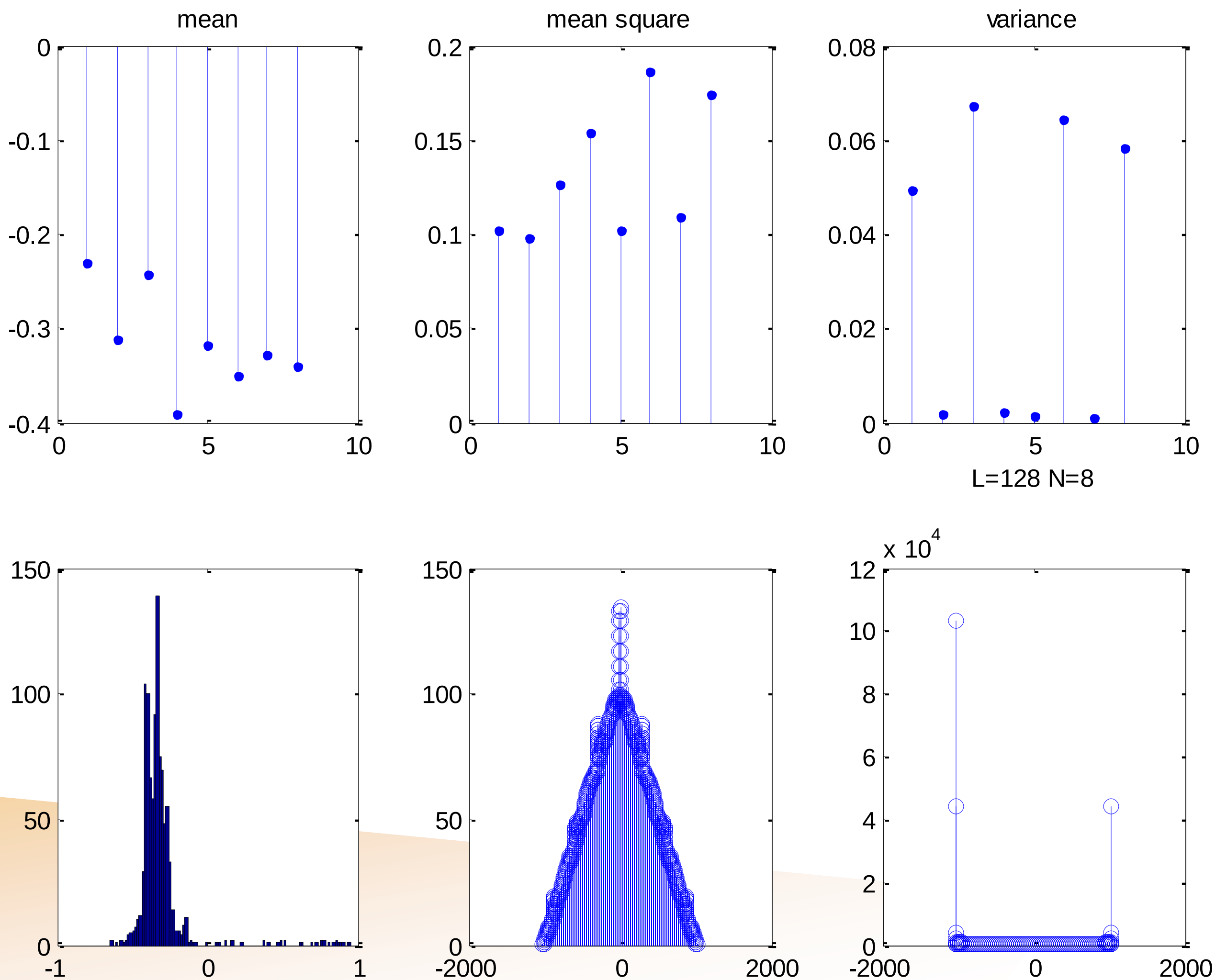
实验二详解……

1 ---- 伪随机序列randn()，L=128，N=8



实验二详解……

2----实际测量的心电信号，L=128，N=8



实验二详解

3---实际测量的脑电信号，L=128，N=8